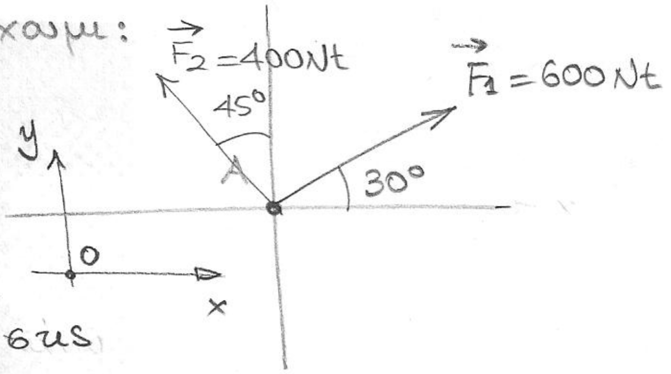
Άσκηση 1 ✓

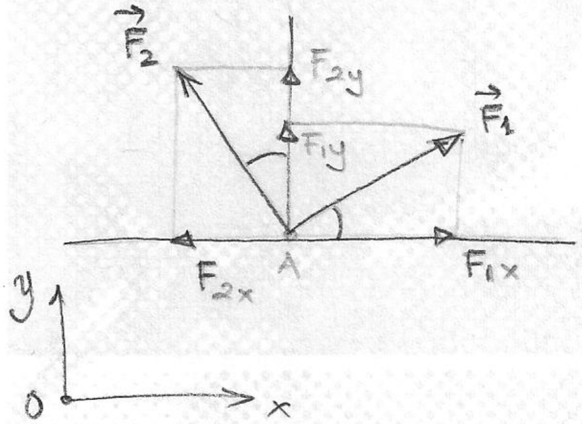
Στο υλικό σημείο Α ασκούνται δύο δυνάμεις $\vec{F_1}$ & $\vec{F_2}$ (δες σχήμα) Να βρεθούν το μέτρο και η φορά της συνισταμένης δύναμης

Λύση : Σχηματικά έχουμε:



Πρώτος τρόπος λύσης

Αναλύουμε τις δυνάμεις στις συνιστώσες τους στους x,y άξονες, αθροίζουμε τις συνιστώσες αλγεβρικά:



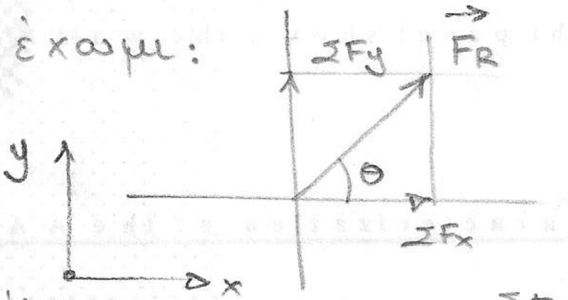
$$\Sigma F_x = \overset{F_{1x}}{600\cos 30°} - \overset{F_{2x}}{400 \sin 45°} = 236.8 \, Nt \; (\rightarrow)$$

$$\Sigma F_y = F_{1y} - F_{2y} = 600 \sin 30° + 400 \cos 45° = 582.8 \, Nt \; (\uparrow)$$

Η συνολική δύναμη έχει μέτρο:

$$|\vec{F}| = F_r = \sqrt{\Sigma F_x^2 + \Sigma F_y^2} = \sqrt{236.8^2 + 582.8^2} = 629 \, Nt$$

και σχηματικά έχουμε:



Η γωνία θ υπολογίζεται ως: $\tan\theta = \dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\dfrac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}\right)$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{582.8}{236.8}\right) = 67.9°$$

Δεύτερος τρόπος λύσης

Αρχικά εκφράζουμε κάθε δύναμη σαν καρτεσιανό διάνυσμα:

$$\vec{F_1} = 600\cos 30^\circ\, \bar{x_0} + 600 \sin 30^\circ\, \bar{y_0}$$

$$\vec{F_2} = -400 \sin 45^\circ\, \bar{x_0} + 400 \cos 45^\circ\, \bar{y_0}$$

Οπότε : $\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (600\cos 30^\circ - 400 \sin 45^\circ)\, \bar{x_0} +$

$$+ \; (600 \sin 30^\circ + 400 \cos 45^\circ)\, \bar{y_0} =$$

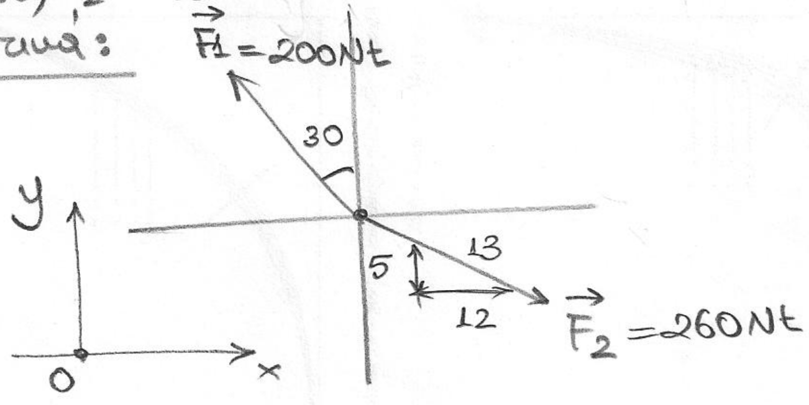
$$= 236.8\, \bar{x_0} + 582.8\, \bar{y_0}$$

Το μέτρο υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο, καθώς και η γωνία της συνολικής δύναμης $\vec{F_R}$.

Άσκηση 2 (φυλλάδιο 1)

Στο υλικό σημείο Α ασκούνται οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ (δες σχήμα). Να εκφράσετε κάθε δύναμη ως καρτεσιανό διάνυσμα. ($F_1 = 200 Nt$, $F_2 = 260 Nt$)

Σχηματικά:



Λύση.

$$\left.\begin{array}{l} F_{1x} = -200 \sin 30^\circ \ Nt = -100 \ Nt \\ F_{1y} = 200 \cos 30^\circ \ Nt = 173 \ Nt \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_1 = F_{1x}\bar{x}_o + F_{1y}\bar{y}_o =$$

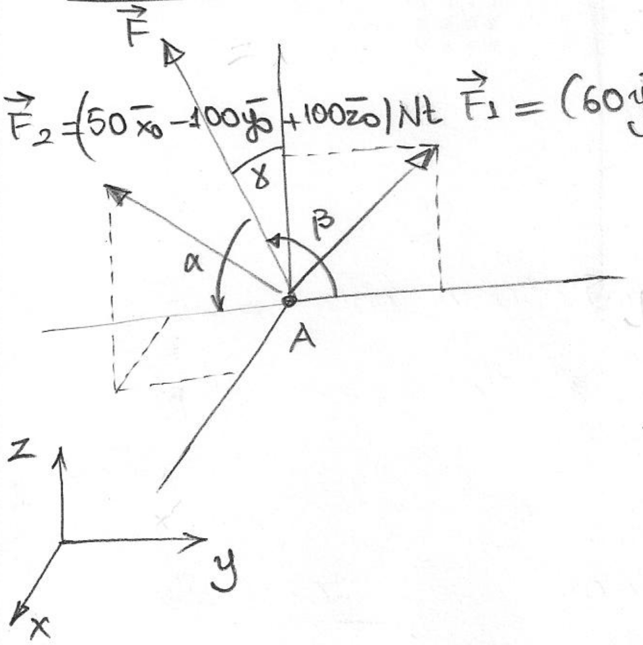
$$= -100\,\bar{x}_o + 173\,\bar{y}_o \ (Nt)$$

$$\left.\begin{array}{l} F_{2x} = 260 \cdot \frac{12}{13} = 240 \ Nt \\ F_{2y} = 260 \ \frac{5}{13} = 100 \ Nt \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}_2 = 240\,\bar{x}_o - 100\,\bar{y}_o \ (Nt)$$

Άσκηση 3 (Φυλλάδιο 2)

Στο υλικό σημείο A που βρίσκεται στο χώρο ασκούνται δύο δυνάμεις: $\bar{F}_1 = (60\bar{y}_0 + 80\bar{z}_0)$ Nt και $\bar{F}_2 = (50\bar{x}_0 - 100\bar{y}_0 + 100\bar{z}_0)$ Nt, (δες σχήμα). Να βρεθούν το μέτρο της συνολικής δύναμης και οι γωνίες της συνισταμένης δύναμης ως προς τους άξονες x, y, z.

Σχηματικά



Λύση

Η συνισταμένη δύναμη σε καρτεσιανή μορφή θα είναι:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (60\bar{y}_0 + 80\bar{z}_0) + (50\bar{x}_0 - 100\bar{y}_0 + 100\bar{z}_0)\ (\text{Nt}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 50\bar{x}_0 - 40\bar{y}_0 + 180\bar{z}_0\ (\text{Nt})$$

Το μέτρο της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}$ είναι:

$$|\vec{F}| = \sqrt{50^2 + (-40)^2 + (180)^2} = 191\ (\text{Nt})$$

και για τον υπολογισμό των γωνιών έχουμε ότι:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\vec{F}|} = 0.2617 \Rightarrow \alpha = 74.8^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{|\vec{F}|} = -0.2094 \Rightarrow \beta = 102^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{|\vec{F}|} = 0.9422 \Rightarrow \gamma = 19.6^\circ$$

$\boxed{\text{Άσκηση 4}}$ ✓

Υλικό σημείο μάζας m υπόκειται σε δύναμη της μορφής kx. Όταν $x=0$ η ταχύτητα του είναι u_0, να βρεθεί η ταχύτητα όταν $x=2$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση κίνησης είναι:

$$kx = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Η ταχύτητα u είναι ίση με $u = dx/dt$. Έτσι η διαφορική εξίσωση γράφεται:

Επειδή $u = u(x)$ γράφεται

$$kx = m\frac{du}{dt} \Rightarrow kx = m\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = mu\frac{du}{dx} \quad (1)$$

Η (1) είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης χωριζομένων μεταβλητών:

$$kx\,dx = mu\,du \Longrightarrow \int kx\,dx = \int mu\,du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\int x\,dx = m\int u\,du \Rightarrow k\frac{x^2}{2} = m\frac{u^2}{2} + C$$

Από συνθήκες έχουμε ότι: για $x=0$, $u=u_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2}mu_0^2 \text{ επομένως } \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(u^2 - u_0^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}}mu^2 = \cancel{\tfrac{1}{2}}kx^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}mu_0^2 \Rightarrow \boxed{u^2 = u_0^2 + \frac{kx^2}{m}}$$

για $x=2$: $\boxed{u^2 = u_0^2 + \frac{4k}{m}}$

Άσκηση 5 ✓

Υλικό σημείο P, μάζας m κινείται υπό την επίδραση της δύναμης: $\vec{F} = X\bar{x_0} + Y\bar{y_0} + Z\bar{z_0}$ η οποία είναι σταθερή.

1) Να υπολογιστεί το διάνυσμα θέσης του σημείου P σαν συνάρτηση του χρόνου t.

2) Αν υποθέσουμε ότι η δύναμη $\bar{F}$ είναι παράλληλη στον άξονα των z, να υπολογιστεί το διάνυσμα θέσεως γι' αυτή την περίπτωση, $\bar{r} = \bar{r}(t)$

Να δειχθεί σε αυτή την περίπτωση ότι η τροχιά του υλικού σημείου είναι μια παραβολή. Την χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι:

στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ισχύει

$$\bar{F} = m\bar{\alpha}, \quad \vec{\alpha} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{x_0} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{y_0} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{z_0}$$

επίσης $\bar{F} = X\bar{x_0} + Y\bar{y_0} + Z\bar{z_0}$ οπότε:

$$X\bar{x_0} + Y\bar{y_0} + Z\bar{z_0} = m\frac{d^2x}{dt^2}\bar{x_0} + m\frac{d^2y}{dt^2}\bar{y_0} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{z_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ Y = m\dfrac{d^2y}{dt^2} \\ Z = m\dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη διαφορική εξίσωση έχουμε ότι:

X σταθερά

$$\int X\,dt = m\int\frac{d^2x}{dt^2}dt \Rightarrow \int X dt = m\int\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$\Rightarrow \frac{Xt}{m} + \alpha_1 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{Xt}{m}dt + \alpha_1 dt = dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{Xt}{m}dt + \int\alpha_1 dt = \int\frac{dx}{dt}dx \Rightarrow \frac{X}{2m}t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2 = x$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{X}{2m}t^2 + \alpha_1 t + \alpha_2} \quad (1)$$

όμοια και για τις άλλες δύο εξισώσεις έχουμε ότι:

$$y=\frac{Y}{2m}t^2+\beta_1 t+\beta_2 \quad \text{και} \quad z=\frac{Z}{2m}t^2+\gamma_1 t+\gamma_2 \qquad (2) \quad (3)$$

όπου οι $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ είναι σταθερές που μπορούν να υπολογιστούν από αρχικές συνθήκες.

2) Αν υποθέσουμε ότι η $\vec{F}$ είναι παράλληλη στον z-άξονα οι συνιστώσες της $\vec{F}$ στις διευθύνσεις x ς' y είναι ίσες με μηδέν, δηλαδή:

$$X=0 \quad \text{και} \quad Y=0. \qquad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στις (2) ς' (3) προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} x=\alpha_1 t+\alpha_2 \\ y=b_1 t+b_2 \\ z=\dfrac{Z}{2m}t^2+c_1 t+c_2 \end{cases} \qquad (5)$$

Για $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στην αρχή του συστήματος οπότε η (5) γίνεται:

$$\begin{cases} x=\alpha_2 \\ y=b_2 \\ z=c_2 \end{cases}, \quad t=0 \text{ και στην αρχή των αξόνων}$$

$$x=y=z=0 \Rightarrow \alpha_2=b_2=c_2=0$$

οπότε η (5) γράφεται ως:

$$\begin{cases} x=\alpha_1 t \\ y=b_1 t \\ z=\dfrac{Z}{2m}t^2+c_1 t \end{cases} \quad (6) \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{\alpha_1} \text{ και αντικαθισ.} \\ y=\dfrac{b_1}{\alpha_1}x \\ z=\dfrac{Z}{2m}\dfrac{x^2}{\alpha_1^2}+\dfrac{c_1}{\alpha_1}x \quad (7) \end{cases}$$

Θέτουμε $\frac{Z}{2m\alpha_1^2}=p$ και $\frac{c_1}{\alpha_1}=q$ και η (7) γράφεται στην μορφή:

$$z=px^2+qx=px^2+qx+\frac{q^2}{4p}-\frac{q^2}{4p}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2-\frac{q^2}{4p}\Rightarrow z+\frac{q^2}{4p}=p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2 \quad (8)$$

Θέτοντας: $\begin{cases} z'=z+\dfrac{q^2}{4p} \\ x'=x+\dfrac{q}{2p} \end{cases}$ η (8) γίνεται:

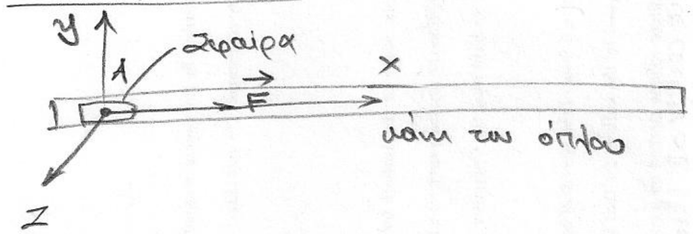
$z'=px'^2$ που είναι εξίσωση παραβολής.

Άσκηση 6 ✓

Σφαίρα (υλικό σημείο) μάζας m κινείται μέσα στην κάννη όπλου υπό την επίδραση της δύναμης $F = F_0 \sin(\pi t/t_0)$.
Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας κάθε χρονική στιγμή μέσα στην κάννη. Ποια είναι η μέγιστη της ταχύτητα;
Να υπολογιστεί επίσης η θέση της σφαίρας μέσα στην κάννη σαν συνάρτηση του χρόνου. (αρχικά, $t=0$, $u_0=0$ και $x_0=0$)

Λύση

Σχηματικά



Η σφαίρα μέσα στην κάννη κινείται κατά την x-διεύθυνση. Γράφοντας τον 2ο Νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι:

$$m a_x = F_x = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) \Rightarrow m a_x = F_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) \Rightarrow$$

επειδή $a_x = \dfrac{du}{dt}$ έχουμε

$$\Rightarrow a_x = \frac{du}{dt} = \frac{F_0}{m}\sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) \Rightarrow \int_{u_0=0}^{u} du = \int_{t_0=0}^{t} \frac{F_0}{m}\sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u - \cancelto{0}{u_0} = \frac{F_0}{m}\int_0^{t}\sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)dt = \frac{F_0 t_0}{m\pi}\left[-\cos\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)\right]_0^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{F_0 t_0}{m\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)\right]} \quad (1)$$

Η (1) παίρνει την μέγιστη ταχ. όταν $\cos\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) = -1$ ή όταν $t = t_0$

τότε $u_{max} = \dfrac{2F_0 t_0}{m\pi}$

Τέλος: $u = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{F_0 t_0}{m\pi}\left[1 - \cos\left(\dfrac{\pi t}{t_0}\right)\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow dx = \frac{F_0 t_0}{m\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)\right]dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{x_0=0}^{x} dx = \int_{t_0=0}^{t} \left(\frac{F_0 t_0}{m\pi}\right)\left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)\right] dt \Rightarrow$$

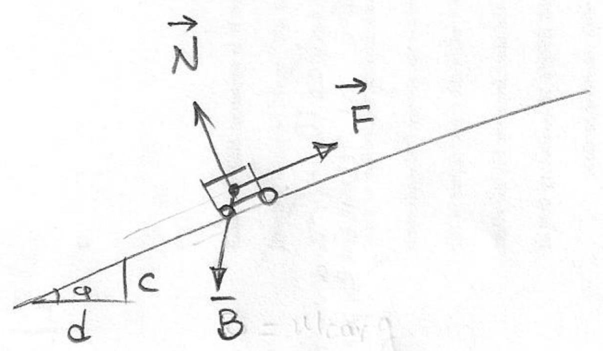
$$\Rightarrow x - \cancel{x_0}^{\,0} = \frac{F_0 t_0}{m\pi}\left(t\Big|_0^t - \frac{t_0}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)\Big|_0^t \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{F_0 t_0}{m\pi}\left[t - \frac{t_0}{\pi}\sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right)\right]}$$

Άσκηση 7.

Όχημα (υλικό σημείο) μάζας m_{car} ανεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο του σχήματος υπό την επίδραση της δύναμης $F=bt^2$. Αν το όχημα έχει αρχική ταχύτητα u_0, όταν $t=0$ να υπολογιστεί η ταχύτητα του όταν $t=t_1$. Δίνονται: $m_{car}=400$ kgr, $b=3200\ Nt/s^2$, $u_0=2\ m/s$, $t_1=2\ s$, $g=9.81\ m/s^2$, $c=8$, $d=15$, (δες σχήμα).

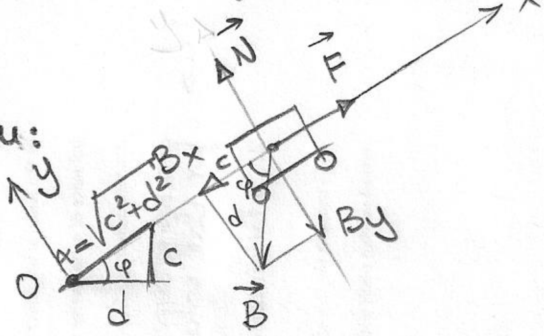
Σχηματικά



Λύση

Τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στο όχημα είναι το $B=m_{car}g$ βάρος, η $F=bt^2$ και η αντίδραση από το κεκλιμένο επίπεδο, F_N ή N

Επιλέγω το σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα.



Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης είναι:

$$bt^2 - m_{car} g \sin\varphi = m_{car}\alpha_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow bt^2 - m_{car} g \frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}} = m_{car}\alpha_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_x = \frac{bt^2}{m_{car}} - \frac{gc}{\sqrt{c^2+d^2}} \Rightarrow \alpha_x = \frac{b}{m_{car}}t^2 - \frac{gc}{\sqrt{c^2+d^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du_x}{dt} = \frac{b}{m_{car}}t^2 - \frac{gc}{\sqrt{c^2+d^2}} \Rightarrow du_x = \left(\frac{b}{m_{car}}t^2 - \frac{gc}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)dt \xrightarrow{\text{ολοκλ.}}$$

$$\Rightarrow \int_{u_0}^{u_1} du_x = \int_{t_0=0}^{t_1}\left(\frac{b}{m_{car}}t^2 - \frac{gc}{\sqrt{c^2+d^2}}\right)dt \Rightarrow u_1 - u_0 = \frac{b}{m_{car}}\frac{t_1^3}{3} - \frac{gc}{\sqrt{c^2+d^2}}t_1 \Rightarrow$$

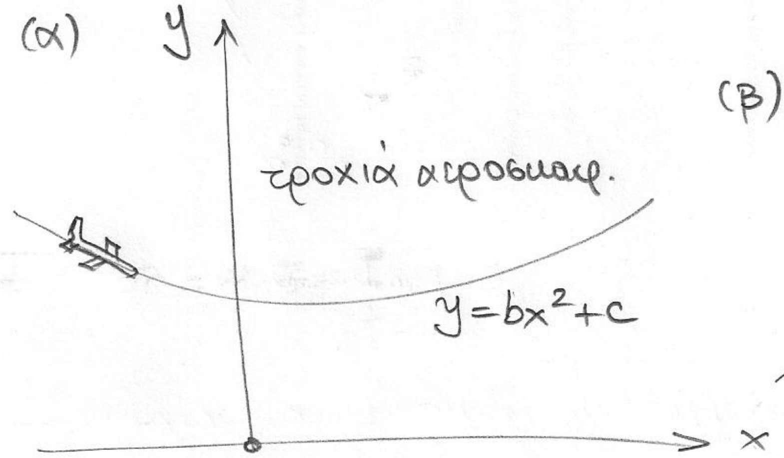
$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{b}{m_{car}}\frac{t_1^3}{3} - \frac{gc}{\sqrt{c^2+d^2}}t_1 + u_0} \Rightarrow u_1 = 14.1\ m/s^2$$

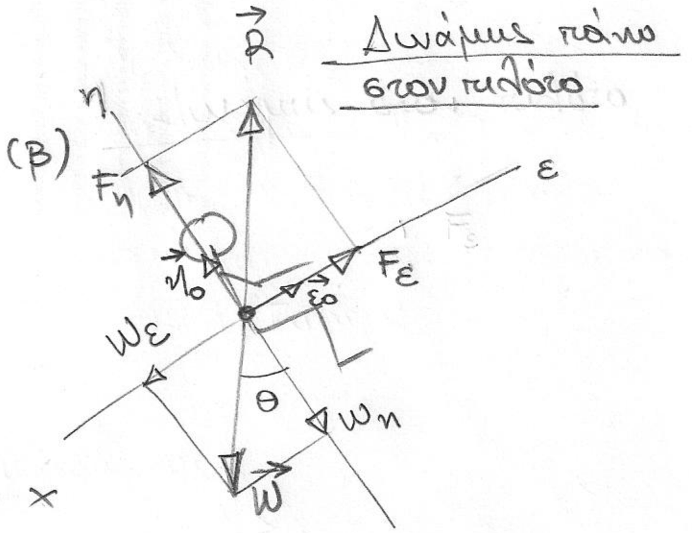
Άσκηση 8 (φυλλαδίου 3)

Αεροσκάφος κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου u κατά μήκος της καμπύλης $y=bx^2+c$. Αν ο πιλότος έχει βάρος, W, να υπολογιστούν η εφαπτομενική και κεντρομόλος συνιστώσες της δύναμης πάνω στον πιλότο όταν $y=y_1$.

Δίνονται: $b=20\times10^{-6}\,\frac{1}{kg}$, $W=180\,kgf$, $c=5000\,m$, $u=1000\,m/s$, $g=9.81\,m/s^2$, $y_1=10000\,m$

Σχηματικά





Λύση.

Το αεροσκάφος κινείται πάνω στην καμπύλη: $y(x)=bx^2+c$

οπότε $y'(x)=2bx$ και $y''(x)=2b$.

Η ακτίνα καμπυλότητας δίνεται από την σχέση: $\rho(x)=\dfrac{\sqrt{\left(1+y'(x)^2\right)^3}}{y''(x)}$

Εργάζομαι σε φυσικό σύστημα συντεταγμένων (δες σχήμα (β))

$\tan\theta = y'(x)$

Ο νόμος του Νεύτωνα στις ε και η - διευθύνσεις γράφεται: (με μοναδιαία $\hat{\varepsilon}_0$ και $\hat{\eta}_0$ αντίστοιχα)

ε: $F_\varepsilon - W_\varepsilon = m\,a_\varepsilon$ (όμως $a_\varepsilon=0$ γιατί το αεροσκάφος κινείται με σταθερή ταχύτητα μέτρου $|\vec{u}|=u$)

$F_\varepsilon - W\sin\theta = 0$

η: $F_\eta - W_\eta = m\,a_\eta \Rightarrow$ (όμως a_η είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση δηλ. $a_\eta=\dfrac{|u|^2}{\rho}=\dfrac{u^2}{\rho}$)

$$\Rightarrow F_n - W\cos\theta = \frac{W}{g}\left(\frac{u^2}{\rho(x)}\right)$$

$W = mg$
(βάρος)

Άρα :
$$\begin{cases} F_\varepsilon - W\sin\theta = 0 \\ F_n - W\cos\theta = \dfrac{W}{g}\left(\dfrac{u^2}{\rho(x)}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Το x_1 μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση $y_1 = bx_1^2 + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10000 = 20\times10^{-6}\, x_1^2 + 5000 \Rightarrow \frac{5000}{20\times10^{-6}} = x_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{250\times10^6}$$ η αρνητική ρίζα απορ. $\Rightarrow x_1 = 15.811\ m$

$$\tan\theta = y'(x_1) \Rightarrow \tan\theta = 2bx_1 = 2\times20\times10^{-6}\times15811 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan\theta = 0.031622 \Rightarrow \theta = \arctan(0.031622) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = 32.3^\circ$$

Τέλος: $F_\varepsilon = W\sin\theta = 180\sin(32.3^\circ)$ και

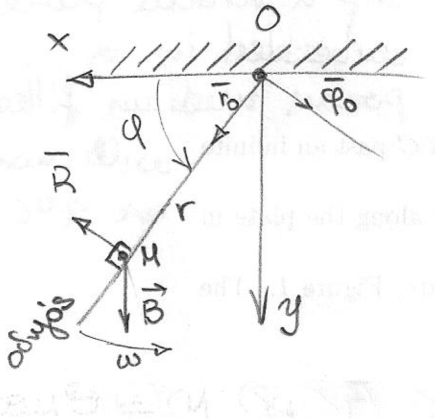
$$F_n = \frac{W}{g}\left(\frac{|u|^2}{\rho(x)}\right) + W\cos\theta$$

Άσκηση 13

(Φυλλάδιο 4)

Ευθύγραμμος οδηγός περιστρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από το άκρο O. Στον ευθύγραμμο οδηγό ολισθαίνει μικρός δακτύλιος M. Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο δακτύλιος ξεκινάει από την ηρεμία από το O. Να βρεθεί η τροχιά του M σε πολικές συντεταγμένες (Για $t=0$, $\varphi=0$).

Λύση



$\vec{r}_0, \vec{\varphi}_0$: διανυσματικές μονάδες

$\vec{R}$: αντίδραση

$OM = r$

Από 2ο νόμο του Νεύτωνα:

$$m\vec{\alpha} = \vec{B} + \vec{R} \qquad (1)$$

Σε πολικές συντεταγμένες

$$\vec{\alpha} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{r}_0 + 2\dot{r}\omega\,\vec{\varphi}_0 \qquad (2)$$

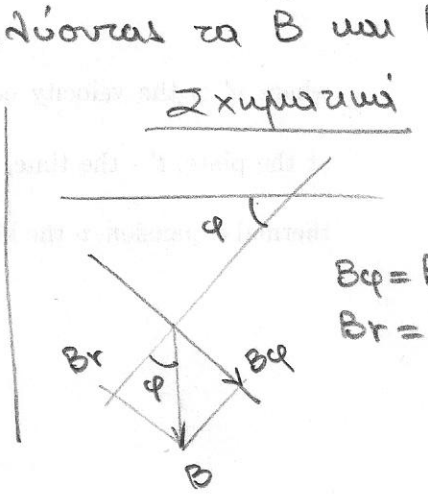
$$(\dot{\varphi} = \omega, \quad \ddot{\varphi} = 0)$$

Λαμβάνοντας υπόψη την (2) και αναλύοντας τα $\vec{B}$ και $\vec{R}$ στο σύστημα $\vec{r}_0, \vec{\varphi}_0$ λαμβάνουμε,

$$B\sin\varphi = m(\ddot{r} - r\omega^2) \qquad (3)$$

$$B\cos\varphi - R = m(2\dot{r}\omega) \qquad (4)$$

Σχηματικά



$B_\varphi = B\cos\varphi$

$B_r = B\sin\varphi$

Επειδή $B = mg$ και $\varphi = \omega t$ η (3) είναι:

$$\ddot{r} - r\omega^2 = g\sin\varphi \qquad (5)$$

(δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές)

Η γενική λύση της (5) είναι:

$$r = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t} - \left(\frac{g}{2\omega^2}\right)\sin\omega t, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές}$$

Επειδή για $t=0$, $r=0$, $\dot{r}=0$ προκύπτει τελικά ότι:

$$r = \frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2} - \sin\omega t\right)$$

$\boxed{\text{Άσκηση 14}}$ ✓

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στο επίπεδο Oxy υπό την επίδραση της δύναμης

$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial y}\bar{x}_0 + \frac{\partial U}{\partial x}\bar{y}_0$$

όπου $U = U(x,y)$. Να δειχθεί ότι: $\dot{x}\dot{y} - \frac{U}{m} = C =$ σταθ.

Λύση

Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \text{ όπου } \vec{a} = \ddot{x}\bar{x}_0 + \ddot{y}\bar{y}_0 \text{ στο επίπεδο } Oxy$$

και $\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial y}\bar{x}_0 + \frac{\partial U}{\partial x}\bar{y}_0$

οπότε: $m\ddot{x}\bar{x}_0 + m\ddot{y}\bar{y}_0 = \frac{\partial U}{\partial y}\bar{x}_0 + \frac{\partial U}{\partial x}\bar{y}_0 \quad (1)$

Από την (1) λαμβάνουμε: $\left\{\begin{array}{l} m\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \\ m\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m\frac{d}{dt}(\dot{x}) = \frac{\partial U}{\partial y} \\ m\frac{d}{dt}(\dot{y}) = \frac{\partial U}{\partial x} \end{array}\right. \quad (2)$$

, επειδή το $U(x,y)$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} \Rightarrow$$

από (2) $\Rightarrow \frac{dU}{dt} = m\frac{d\dot{y}}{dt}\frac{dx}{dt} + m\frac{d\dot{x}}{dt}\frac{dy}{dt} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{m}\frac{dU}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dt}\dot{x} + \frac{d\dot{x}}{dt}\dot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{y}\dot{x}) \Rightarrow \frac{1}{m}\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{y}\dot{x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(m\dot{y}\dot{x}) \Rightarrow U = m\dot{y}\dot{x} + C \Rightarrow \dot{y}\dot{x} = \frac{U}{m} + C_1$$

όπου $C_1 = -\frac{C}{m}$ άρα έχουμε ότι $\dot{y}\dot{x} - \frac{U}{m} = C_1 =$ σταθ.

Άσκηση 15 ✓

Υλικό σημείο μάζας m κινείται με την επίδραση του βάρους $-mg\bar{z}_0$ στο επίπεδο $Ax+By+\Gamma z=0$, όπου ($A, B, \Gamma =$ σταθ.) και $A^2+B^2+\Gamma^2=1$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο βρίσκεται στη θέση $O(0,0,0)$ και έχει ταχύτητα $\vec{v}_0(0,0,0)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις Lagrange α' είδους, να ολοκληρωθούν αυτές και να βρεθεί η λύση των αντίστοιχη στις δοθείσες αρχικές συνθήκες.

Λύση

Επιβεβλημένη δύναμη: $\vec{F}^{(\epsilon)} = \vec{B} = -mg\bar{z}_0$

Δεσμική δύναμη : $\vec{F}^{(\delta)} = \lambda\bar{\nabla}f$ όπου ο δεσμός

$f(x,y,z) = Ax+By+\Gamma z=0$

Άρα $\vec{F}^{(\delta)} = \lambda\bar{\nabla}f = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\bar{z}_0\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{F}^{(\delta)} = \lambda\left(A\bar{x}_0 + B\bar{y}_0 + \Gamma\bar{z}_0\right)$

Οι διαφορικές εξισώσεις Lagrange α' είδους είναι:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda A \\ m\ddot{y} &= \lambda B \\ m\ddot{z} &= -mg + \lambda\Gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\lambda}{m}A \quad (1) \\ \ddot{y} &= \frac{\lambda}{m}B \quad (2) \\ \ddot{z} &= -g + \frac{\lambda}{m}\Gamma \quad (3) \end{aligned}$$

Πολ/ζουμε τις (1), (2) και (3) με A, B, Γ αντίστοιχα και προσθέτουμε:

$$A\ddot{x} + B\ddot{y} + \Gamma\ddot{z} = \frac{\lambda}{m}(A^2+B^2+\Gamma^2) - g\Gamma \quad (4)$$

Επειδή $A^2+B^2+\Gamma^2=1$

η (4) γίνεται $A\ddot{x} + B\ddot{y} + \Gamma\ddot{z} = \frac{\lambda}{m} - g\Gamma$, από την

$$Ax + By + \Gamma z = 0 \Rightarrow A\dot{x} + B\dot{y} + \Gamma\dot{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\ddot{x} + B\ddot{y} + \Gamma\ddot{z} = 0 \qquad (5)$$

Άρα $A\ddot{x} + B\ddot{y} + \Gamma\ddot{z} = 0 = \frac{\lambda}{m} - g\Gamma \Rightarrow \lambda = mg\Gamma \quad (6)$

Λαμβάνοντας υπόψιν την (6), οι (1), (2) και (3) γράφονται

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= gA\Gamma \\ \ddot{y} &= gB\Gamma \\ \ddot{z} &= -g + g\Gamma^2 \\ &= (\Gamma^2 - 1)g \end{aligned}\right\} \text{διαφορικές εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή για $t=0$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$, $\dot{z}=0$

και ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου λαμβάνουμε:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} gA\Gamma t^2 \\ y = \frac{1}{2} gB\Gamma t^2 \\ z = \frac{1}{2} g(\Gamma^2 - 1)t^2 \end{cases}$$

Άσκηση 16 (φυλ. 5)

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στην επιφάνεια της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ και απωθείται από κάθε ένα από τα συντεταγμένα επίπεδα με δύναμη $\vec{F}$ αντιστρόφως ανάλογη της τρίτης δύναμης των συντεταγμένων από αυτά (συντελεστής αναλογίας k_1, k_2, k_3). Να δ.ο. η αντίδραση της επιφάνειας έχει σταθερό μέτρο.

Λύση

Δεσμός: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\alpha^2=0$ (1)

Επιβεβλημένη δύναμη: $\vec{F}^{(e)} = \vec{F}$, $\vec{F} = \frac{k_1}{x^3}\vec{x}_0 + \frac{k_2}{y^3}\vec{y}_0 + \frac{k_3}{z^3}\vec{z}_0$ (2)

Δεσμική δύναμη: $\vec{F}^{(\delta)} = \lambda\vec{\nabla} f \Rightarrow \vec{F}^{(\delta)} = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{x}_0 + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{y}_0 + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}_0\right)$

$\Rightarrow \vec{F}^{(\delta)} = 2\lambda(x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (3)

Μέτρο δεσμικής δύναμης ≡ Αντίδραση της επιφάνειας

Άρα, $|\vec{F}^{(\delta)}| = 2|\lambda|\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2|\lambda|\alpha$ (4)

Για να αποδείξουμε ότι η αντίδραση της επιφάνειας στο υλικό σημείο έχει σταθερό μέτρο θα πρέπει το $|\lambda|$ να είναι σταθερό.

Από τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης έχουμε ότι:

$m\ddot{x} = F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{k_1}{x^3} + 2\lambda x$, (5)

$m\ddot{y} = F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{k_2}{y^3} + 2\lambda y$, (6)

$m\ddot{z} = F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{k_3}{z^3} + 2\lambda z$. (7)

Πολλαπλασιάζοντας τις (5), (6), (7) αντίστοιχα επί x, y και z και προσθέτοντας:

$m(x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}) = \frac{k_1}{x^2} + \frac{k_2}{y^2} + \frac{k_3}{z^2} + 2\lambda(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow m(x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}) = \frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{y^2}+\frac{k_3}{z^2}+2\lambda\alpha^2 \quad (8)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (5), (6), (7) επί $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ αντίστοιχα και προσθέτοντας έχουμε:

$$m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}) = \frac{k_1\dot{x}}{x^3}+\frac{k_2\dot{y}}{y^3}+\frac{k_3\dot{z}}{z^3}+2\lambda(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}) \quad (9)$$

Επειδή: $x^2+y^2+z^2=\alpha^2 \Rightarrow 2(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})=0 \; (*)$

Η (9) γράφεται:

$$m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}) = \frac{k_1\dot{x}}{x^3}+\frac{k_2\dot{y}}{y^3}+\frac{k_3\dot{z}}{z^3} \quad (10)$$

Η (10) γράφεται:

$$m\left(\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt}+\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dt}+\dot{z}\frac{d\dot{z}}{dt}\right) = k_1x^{-3}\frac{dx}{dt}+k_2y^{-3}\frac{dy}{dt}+k_3z^{-3}\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow m(\dot{x}d\dot{x}+\dot{y}d\dot{y}+\dot{z}d\dot{z}) = k_1x^{-3}dx+k_2y^{-3}dy+k_3z^{-3}dz \quad (11)$$

$$\Rightarrow m\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+\frac{\dot{y}^2}{2}+\frac{\dot{z}^2}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{x^2}+\frac{k_2}{y^2}+\frac{k_3}{z^2}\right)+c, \; c=\text{σταθ.} \quad (12)$$

Προσθέτοντας τις (8) και (12) λαμβάνουμε:

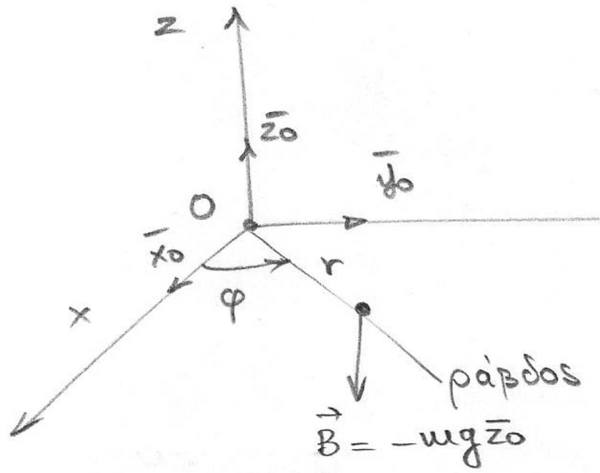
$$\left.\begin{array}{l} m(x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) = 2\lambda\alpha^2+c' \\ \text{και επειδή } x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}+\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=0 \\ \text{από } (*) \text{ αν παραγωγίσουμε} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda\alpha^2+c'=0 \Rightarrow \lambda = -\frac{c'}{2\alpha^2} \text{ σταθερά}$$

Άσκηση 17 (Φυλ. 6)

Υλικό σημείο μάζας m κινείται σε ευθεία που περιστρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο Oxy. Η ευθεία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Να βρεθεί η κίνηση του υλικού σημείου (Για $t=0$, $\phi=0$)

Λύση



Εξισώσεις δεσμών:

$$f_1 = y - x\tan\phi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1 = x\sin\phi - y\cos\phi = 0$$

$$f_2 = z = 0.$$

Επιβεβλημένη δύναμη $\vec{F}^{(\varepsilon)}$: $\vec{F}^{(\varepsilon)} = -mg\,\bar{z}_0$

Δεσμική δύναμη: $\vec{F}^{(\delta)}$: $\vec{F}^{(\delta)} = \lambda_1 \bar{\nabla} f_1 + \lambda_2 \bar{\nabla} f_2 =$

$$= \lambda_1 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial z}\bar{z}_0 \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial f_2}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial f_2}{\partial z}\bar{z}_0 \right)$$

$$= \lambda_1 (\sin\phi\,\bar{x}_0 - \cos\phi\,\bar{y}_0 + 0\,\bar{z}_0) + \lambda_2 (0\,\bar{x}_0 + 0\,\bar{y}_0 + 1\,\bar{z}_0) =$$

$$= \lambda_1 (\sin\phi\,\bar{x}_0 - \cos\phi\,\bar{y}_0) + \lambda_2 \bar{z}_0, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Επειδή $\dot{\phi} = \omega = \sigma\tau\alpha\vartheta \Rightarrow \phi = \omega t$ (4)

Άρα η (3) γράφεται:

$$\vec{F}^{(\delta)} = \lambda_1 (\sin\omega t\,\bar{x}_0 - \cos\omega t\,\bar{y}_0) + \lambda_2 \bar{z}_0 \quad (5)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\left.\begin{aligned} (6)\quad & m\ddot{x} = \lambda_1 \sin\omega t \\ (7)\quad & m\ddot{y} = -\lambda_1 \cos\omega t \\ (8)\quad & m\ddot{z} = -mg + \lambda_2 \end{aligned}\right\}$$

επειδή η κίνηση γίνεται στο επίπεδο Oxy θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο πρώτες, (6) & (7)

Προσθέτουμε τις εξισώσεις (6) και (7) και έχουμε:

$$m(\ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\sin\omega t) = 0 \qquad (9)$$

Είναι

$$x = r\cos\omega t \qquad \text{και} \qquad y = r\sin\omega t$$

Παραγωγίζοντας:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\omega t - \omega r\sin\omega t,$$

$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\omega t - \omega\dot{r}\sin\omega t - \omega\dot{r}\sin\omega t - \omega^2 r\cos\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \ddot{r}\cos\omega t - 2\omega\dot{r}\sin\omega t - \omega^2 r\cos\omega t \qquad (10)$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\omega t + \omega\dot{r}\cos\omega t + \dot{r}\omega\cos\omega t - \omega^2 r\sin\omega t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{y} = \ddot{r}\sin\omega t + 2\omega\dot{r}\cos\omega t - \omega^2 r\sin\omega t \qquad (11)$$

Αντικαθιστώντας τις (10) και (11) στην (9) λαμβάνουμε

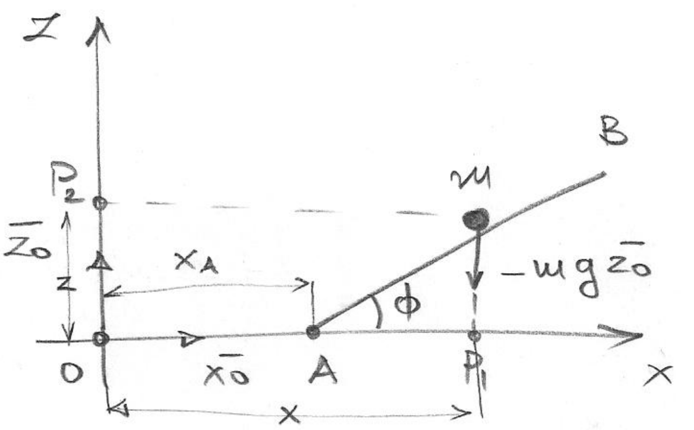
$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \qquad (12)$$

Η γενική λύση της (12) είναι: $r = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$, C_1, C_2 σταθ.

Άσκηση 18

Υλικό σημείο μάζας m κινείται στην ευθεία AB του κεκλιμένου επιπέδου του σχήματος. Το κεκλιμένο επίπεδο κινείται με σταθερή επιτάχυνση $\vec{\alpha} = \alpha \vec{x}_0$ στον άξονα Ox. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σημείο A βρίσκεται στην αρχή O και έχει ταχύτητα $\vec{u}_0 = u_0 \bar{x}_0$. Να βρεθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης του υλικού σημείου.

Λύση



$OA = x_A$, $OP_1 = x$, $OP_2 = z$

Εξισώσεις δεσμών:

$$f_1 = -z + (x - x_A)\tan\phi = 0$$

$$f_2 = y = 0$$

Επιβεβλημένη δύναμη

$$\vec{F}^{(\varepsilon)} = -mg\,\bar{z}_0$$

Δεσμική δύναμη

$$\vec{F}^{(\delta)} = \lambda_1 \bar{\nabla} f_1 + \lambda_2 \bar{\nabla} f_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F}^{(\delta)} = \lambda_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial f_1}{\partial z}\bar{z}_0\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\bar{x}_0 + \frac{\partial f_2}{\partial y}\bar{y}_0 + \frac{\partial f_2}{\partial z}\bar{z}_0\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Επειδή το κεκλιμένο επίπεδο κινείται με σταθερή επιτάχυνση στον άξονα Ox θα ισχύει

$$\ddot{x}_A = \alpha > 0 \Rightarrow \dot{x}_A = \alpha t + c_1 \Rightarrow x_A = \frac{1}{2}\alpha t^2 + c_1 t + c_2, \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές.} \quad (1)$$

Επειδή για $t=0$, $x_A = 0$, $\dot{x}_A = u_0$ η (1) δίνει: $x_A = \frac{1}{2}\alpha t^2 + u_0 t$ (2)

ο δεσμός f_1 λαμβάνοντας υπόψιν την (2) γίνεται

$$f_1 = -z + \left(x - \frac{1}{2}\alpha t^2 - u_0 t\right)\tan\phi = 0 \quad (3)$$

Οπότε οι δεσμικές δυνάμεις είναι:

$$\vec{F}^{(\delta)} = (\lambda_1 \tan\phi\, \bar{x}_0 - \lambda_1 \bar{z}_0) + \lambda_2 \bar{y}_0$$ και οι διαφορικές εξισώσεις

κίνησης είναι:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \lambda_1 \tan\phi & (4) \\ m\ddot{y} = \lambda_2 & (5) \\ m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 & (6) \end{cases}$$

Επειδή η κίνηση γίνεται στο επίπεδο Oxz θα χρησιμοποιήσουμε μόνο τις διαφορ. εξισώσεις (4) και (6)

Δηλ. $$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \lambda_1 \tan\phi \\ m\ddot{z} &= -mg - \lambda_1 \end{aligned}\right\} (7)$$

όμως από την (3) προκύπτει αν παραγωγίσω ως προς t

$$-\dot{z} + \dot{x}\tan\phi = 0 + (u_0 + \alpha t)\tan\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\ddot{z} + \ddot{x}\tan\phi = 0 + \alpha\tan\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m\ddot{z} + m\ddot{x}\tan\phi = m\alpha\tan\phi \quad (8)$$

λαμβάνοντας υπόψιν τις (7), η (8) δίνει

$$\lambda_1 = m(\alpha\sin\phi - g\cos\phi)\sin\phi \quad (9)$$

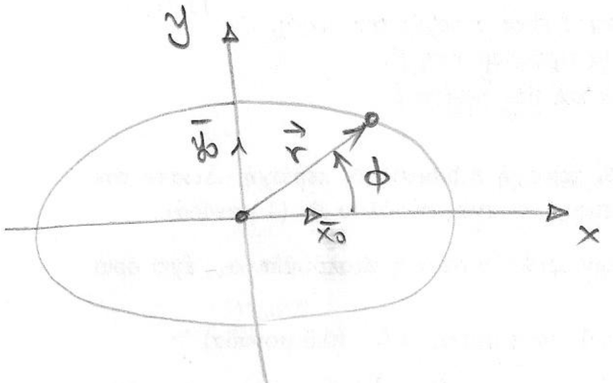
οπότε αντικαθιστώντας την (9) στις (7) λαμβάνουμε τις Δ.Ε. κίνησης.

Άσκηση 19. (Φυλ 7)

Να βρείτε το έργο κατά την πλήρη περιστροφή υλικού σημείου πάνω σε μια έλλειψη στο επίπεδο Oxy.
Η έλλειψη έχει κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων, μεγάλο ημιάξονα και μικρό ημιάξονα 4 και 3 αντίστοιχα. και το πεδίο δυνάμεων δίνεται από τη σχέση,

$$\vec{F} = (3x-4y)\,\overline{x_0} + (4x+2y)\,\overline{y_0}$$

Λύση



Η διανυσματική εξίσωση της έλλειψης είναι:

$$\vec{r} = x\vec{x_0} + y\vec{y_0} = 4\cos\varphi\,\vec{x_0} + 3\sin\varphi\,\vec{y_0} \quad (1)$$

Το έργο είναι ίσο με:

$$W = \oint_{\text{έλλειψη}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\text{έλλειψη}} F_x\,dx + F_y\,dy \quad (2)$$

Επειδή, $F_x = 3x-4y$, $F_y = 4x+2y$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4\cos\phi \Rightarrow dx = -4\sin\phi\,d\phi, \\ y &= 3\sin\phi \Rightarrow dy = 3\cos\phi\,d\phi, \end{aligned}\right. \quad (3)$$

η (2) λαμβάνει τη μορφή,

$$W = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \{3(4\cos\phi) - 4(3\sin\phi)\}(-4\sin\phi)\,d\phi +$$

$$+\{4(4\cos\phi) + 2(3\sin\phi)\}(3\cos\phi)\,d\phi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (48 - 30\sin\phi\cos\phi)\,d\phi = 96\pi.$$

Άσκηση 20 (φυλ. 8)

Να δειχθεί ότι: (α)

$$\vec{F} = (2xz^3+6y)\vec{x}_0 + (6x-2yz)\vec{y}_0 + (3x^2z^2-y^2)\vec{z}_0$$

είναι συντηρητικό πεδίο δυνάμεων.

(β) Να υπολογιστεί το έργο, $W = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου C ένας οποιοσδήποτε δρόμος από το $(1,-1,1)$ έως το $(2,1,-1)$.

Λύση

Αναγκαία και ικανή συνθήκη έτσι ώστε το $\vec{F}$ να είναι συντηρητικό είναι: $\bar{\nabla}\times\bar{F}=0$.

Έχουμε:
$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^3+6y & 6x-2yz & 3x^2z^2-y^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Συνεπώς η δύναμη $\vec{F}$ είναι συντηρητική.

Επειδή η $\vec{F}$ είναι συντηρητική, τότε σύμφωνα με τον ορισμό της,

$$\vec{F} = -\bar{\nabla}V, \quad V = V(x,y,z) \quad (2)$$

ή

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2xz^3+6y &= -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (3) \\ 6x-2yz &= -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (4) \\ 3x^2z^2-y &= -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (5) \end{aligned}$$

Από την (3) ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$-V = x^2 z^3 + 6xy + f_1(y,z) \qquad (6)$$

Από την (4) ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$-V = 6xy - y^2 z + f_2(x,z) \qquad (7)$$

Από την (5) ολοκληρώνοντας προκύπτει:

$$-V = x^2 z^3 - y^2 z + f_3(x,y) \qquad (8)$$

Οι σχέσεις (6), (7) και (8) ισχύουν μόνο αν

$$f_1 = -y^2 z, \quad f_2 = x^2 z^3, \quad f_3 = 6xy \qquad (9)$$

Τελικά το δυναμικό V έχει τη μορφή

$$V(x,y,z) = -x^2 z^3 - 6xy + y^2 z + C, \quad C = \text{σταθ.}$$

Και συνεπώς

$$\int_C \bar{F}\cdot d\bar{r} = -V(2,1,-1) + V(1,1,1) = -15$$

Άσκηση 21 (Φυλ. 9)

Υλικό σημείο.
Σώμα μάζας m κινείται στο επίπεδο Oxy με διάνυσμα θέσης $\vec{r} = A\cos\omega t\, \bar{x}_0 + B\sin\omega t\, \bar{y}_0$, όπου A, B θετικές σταθερές.

(α) Να δείξετε ότι το σώμα κινείται σε έλλειψη

(β) Να δείξετε ότι η δύναμη που δρα στο σώμα είναι συντηρητική και να σχεδιάσετε την κατεύθυνσή της.

(γ) Να υπολογίσετε το έργο που παράγεται από τη δύναμη κατά την κίνηση του σώματος από το A στο B, όπου τα A και B είναι τα άκρα των ημιαξόνων της έλλειψης.

Λύση

(α) είναι $x = A\cos\omega t \Rightarrow \cos^2\omega t = x^2/A^2$
και $y = B\sin\omega t \Rightarrow \sin^2\omega t = y^2/B^2$ } προσθέτω αυτά μέλη και

προκύπτει ότι:

$$1 = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$, η οποία αποτελεί την εξίσωση τροχιάς και παριστάνει έλλειψη.

(β) Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα είναι:

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\left(-A\omega^2\cos\omega t\,\bar{x}_0 - B\omega^2\sin\omega t\,\bar{y}_0\right) =$$

$$= -m\omega^2\left(A\cos\omega t\,\bar{x}_0 + B\sin\omega t\,\bar{y}_0\right) \Rightarrow \vec{F} = -m\omega^2\vec{r} \Rightarrow$$

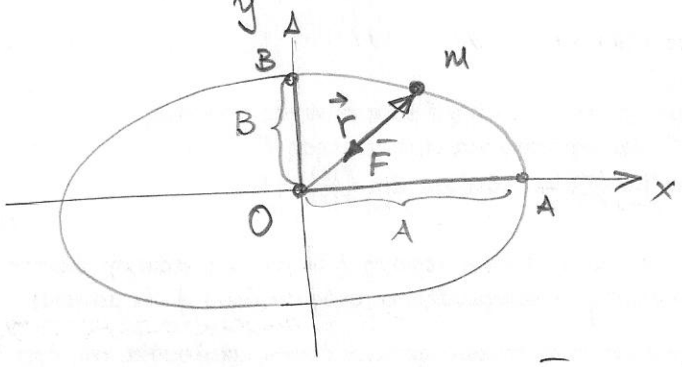
$$\Rightarrow \vec{F} = -m\omega^2\left(x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0\right)$$

Για να είναι η παραπάνω δύναμη συντηρητική θα πρέπει να είναι αστρόβιλη. Δηλαδή:

$$\bar{\nabla}\times\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = 0\,\bar{x}_0 + 0\,\bar{y}_0 + 0\,\bar{z}_0 = \bar{0}$$

Εφόσον $\bar{\nabla}\times F = \bar{0}$, η $\vec{F}$ είναι συντηρητική.

Επειδή η δύναμη είναι της μορφής $\bar{F} = F(r)\,\vec{r} = -m\omega^2 r\,\bar{r}_0$ έχει την διεύθυνση του διανύσματος θέσης και φορά αντίθετη από αυτό όπως φαίνεται στο σχήμα.



(γ) Η δυναμική ενέργεια της $\bar{F}$ υπολογίζεται ως εξής:

$$(*)\quad \bar{F} = -\frac{dV}{d\bar{r}} \Rightarrow \int_0^V dV = -\int_0^r \bar{F}\bullet d\bar{r} \Rightarrow V = m\omega^2\int_0^r \bar{r}\,d\bar{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(\bar{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\bar{r}^2$$

Άρα το έργο της δύναμης για μετακίνηση από το σημείο Α στο σημείο Β ισούται με τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας στα σημεία αυτά. Δηλαδή:

$$W_{A\to B} = V(A) - V(B) = \frac{1}{2}m\omega^2\bar{r}_A^{\,2} - \frac{1}{2}m\omega^2\bar{r}_B^{\,2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - B^2\right)$$

(*) <u>Παρατήρηση</u>: $\frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Rightarrow V = V(r,\theta)$, $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \boxed{V = V(r)}$

Άσκηση 22 (Φυλ. 10)

Να δειχτεί ότι (α) η δύναμη: $\vec{F} = 5r\,\bar{r}_0 + \frac{10}{\theta}\,\bar{\theta}_0 + 5\,\bar{z}_0$ είναι συντηρητική δύναμη. (β) Να βρεθεί το δυναμικό V από το οποίο απορρέει η $\vec{F}$.

Λύση

(α) Για να είναι η $\vec{F}$ συντηρητική πρέπει:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \bar{r}_0 & \bar{\theta}_0 & \bar{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 5r & \frac{10}{\theta} & 5 \end{vmatrix} = \bar{0}.$$

Συνεπώς η $\vec{F}$ συντηρητική.

(β) Για το δυναμικό $V(r,\theta,z)$ ισχύει ότι $\vec{F} = -\vec{\nabla}V \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial r} &= 5r \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{10}{\theta} \\ -\frac{\partial V}{\partial z} &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} V &= -\frac{5r^2}{2} + g_1(\theta,z) \\ V &= \frac{5r}{\theta^2} + g_2(r,z) \\ V &= -5z + g_3(r,\theta) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = -\frac{5}{2}r^2 + \frac{5r}{\theta^2} - 5z + C$$